|  |
| --- |
| **Proporcionalidad: directa e inversa** |

Para comprender el concepto de proporcionalidad, directa o inversa, debemos comenzar por comprender el concepto de [**razón**](http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Razon.html).

**Razón y proporción numérica**

**Razón entre dos números**

Siempre que hablemos de **Razón** entre dos números nos estaremos refiriendo al cociente (el resultado de dividirlos) entre ellos.

Entonces:

|  |  |
| --- | --- |
| **Razón** entre dos números **a** y **b** es el cociente entre      | proporcionalidad001 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Por ejemplo, la razón entre 10 y 2 es 5, ya que**      | proporcionalidad002 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Y la razón entre los números 0,15  y  0,3  es**       | proporcionalidad003 |

**Proporción numérica**

Ahora, cuando se nos presentan **dos razones** para ser comparadas entre sí, para ver como se comportan entre ellas, estaremos hablando de una **proporción numérica.**

Entonces:

|  |
| --- |
| Los números **a, b, c** y **d** forman una **proporción** si la razón entre **a** y **b** es la misma que entre **c** y **d**. |
| Es decir      | proporcionalidad004 |
| Se lee “**a** es a **b** como **c** es a **d”** |

Los números 2,  5  y  8,  20 forman una proporción, ya que la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20.

|  |  |
| --- | --- |
| Es decir      | proporcionalidad005 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| En la proporción  | proporcionalidad004 | hay cuatro términos; **a** y **d** se llaman **extremos**, **c** y **b** se llaman **medios.** |

|  |
| --- |
| La propiedad fundamental de las proporciones es: **en toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios.** |

|  |  |
| --- | --- |
| Así, en la proporción anterior     | proporcionalida005 |

 se cumple que el producto de los extremos nos da 2 x 20 = 40 y el producto de los medios nos da 5 x 8 = 40

|  |
| --- |
| **proporcionalidad006** |



Comprendido el concepto de proporción como una relación entre números o magnitudes, ahora veremos que esa relación puede darse en dos sentidos:

Las dos magnitudes pueden subir o bajar (aumentar o disminuir) o bien si una de las magnitudes sube la otra bajo y viceversa.

Si ocurre, como en el primer caso, que las dos magnitudes que se comparan o relacionan pueden subir o bajar en igual cantidad, hablaremos de Magnitudes directamente proporcionales.

Si ocurre como en el segundo caso, en que si una magnitud sube la otra baja en la misma cantidad, hablaremos de Magnitudes inversamente proporcionales.

**MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES**

|  |
| --- |
| Si dos magnitudes son tales que a **doble, triple...** cantidad de la primera corresponde **doble, triple...** cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son **directamente proporcionales**. |

**Ejemplo**

**Un saco de papas pesa 20 kg. ¿Cuánto pesan 2 sacos?**

**Un cargamento de papas  pesa 520 kg ¿Cuántos sacos de 20 kg se podrán hacer?**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Número de sacos | 1 | 2 | 3 | ... | 26 | ... |
| Peso en kg | 20 | 40 | 60 | ... | 520 | ... |

Para pasar de la 1ª fila a la 2ª basta multiplicar por 20

Para pasar de la 2ª fila a la 1ª dividimos por 20

|  |  |
| --- | --- |
| Observa que      | proporcionalidad008 |

Las magnitudes **número de sacos** y **peso en kg** son **directamente proporcionales**.

La **constante de proporcionalidad** para pasar de número de sacos a kg es 20.

 Esta manera de funcionar de las proporciones nos permite adentrarnos en lo que llamaremos Regla de tres y que nos servirá para resolver un gran cantidad de problemas matemáticos.

**PSU: Matemática;** [**Pregunta 07\_2006**](http://www.profesorenlinea.cl/PSU/Matematica/Preguntas/Pregunta%2007_2006.html)

**REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA**

**Ejemplo 1**

En 50 litros de agua de mar hay 1.300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5.200 gramos de sal?

Como en doble cantidad de agua de mar habrá doble cantidad de sal; en triple, triple, etc. Las magnitudes **cantidad de agua** y **cantidad de sal** son **directamente proporcionales**.

Si representamos por x el número de litros que contendrá 5200 gramos de sal, y formamos la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Litros de agua | 50 | x |
| Gramos de sal | 1.300 | 5.200 |

|  |  |
| --- | --- |
| Se verifica la proporción:      | proporcionalida009 |

Y como **en toda proporción el producto de medios es igual al producto de extremos** (en palabras simples, se multiplican los números en forma cruzada) resulta:

50 por 5.200 = 1.300 por **x**

|  |  |
| --- | --- |
| Es decir         | proporcionalidad010 |

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:



|  |
| --- |
| Esta forma de plantear y resolver problemas sobre proporciones se conoce con el nombre de **regla de tres simple directa**. |

**Ver: PSU: Matemática;**

[**Pregunta 02\_2005**](http://www.profesorenlinea.cl/PSU/Matematica/Preguntas/Pregunta%2002_2005.html)

[**Pregunta 05\_2005**](http://www.profesorenlinea.cl/PSU/Matematica/Preguntas/Pregunta%2005_2005.html)

[**Pregunta 02\_2006**](http://www.profesorenlinea.cl/PSU/Matematica/Preguntas/Pregunta%2002_2006.html)

**Ejemplo 2**

Un automóvil  gasta 5 litros de bencina cada 100 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?



Luego, con 6 litros el automóvil recorrerá 120 km

**MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES**

|  |
| --- |
| Si dos magnitudes son tales que a **doble, triple...** cantidad de la primera corresponde la **mitad**, la **tercera parte**... de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son **inversamente proporcionales.** |

**Ejemplo**

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

En este caso a doble número de trabajadores, el trabajo durará la mitad; a triple número de trabajadores, el trabajo durará la tercera parte, etc. Por tanto,  las **magnitudes** son **inversamente proporcionales (también se dice que son indirectamente proporcionales)**.

Formamos la tabla:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hombres | 3 | 6 | 9 | ... | 18 |
| Días | 24 | 12 | 8 | ... | ? |

Vemos que los productos 3 por 24 = 6 por 12 = 9 por 8 = 72

Por tanto 18 por x = 72

O sea que los 18 hombres tardarán 4 días en hacer el trabajo

Nótese que aquí la constante de proporcionalidad, que es 72, se obtiene multiplicando las magnitudes y que su producto será siempre igual.

|  |
| --- |
| **Importante:****Como regla general, la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes inversamente proporcionales se obtiene multiplicando las magnitudes entre sí, y el resultado se mantendrá constante.**  |

**Ver. PSU: Matemática,** [**Pregunta 10**](http://www.profesorenlinea.cl/PSU/Matematica/Preguntas/Pregunta%2010.html)

**REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA** (O INDIRECTA)

**Ejemplo 1**

Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 450 vacas?

Vemos que con el mismo forraje, si el número de vacas se duplica, tendrá para la mitad de días; a triple número de vacas, tercera parte de días, etc. Por tanto, son magnitudes **inversamente proporcionales**.

X = número de días para el que tendrán comida las 450 vacas

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Nº de vacas | 220 | 450 |
| Nº de días | 45 | x |

|  |  |
| --- | --- |
| Se cumple que: 220 por 45 = 450 por x, de donde      | proporcionalidad011 |

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:



Luego 450 vacas podrán comer 22 días

|  |
| --- |
| Esta forma de plantear y resolver problemas sobre proporciones se conoce con el nombre de **regla de tres simple inversa**. |

**Ejemplo 2**

Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?



Pues la cantidad de vino = 8 por 200 = 32 por x

Debemos tener 32 toneles de 50 litros de capacidad para poder envasar la misma cantidad de vino.

**PROPORCIONALIDAD COMPUESTA DE MAGNITUDES**

**Regla de tres compuesta. Método de reducción a la unidad**

**Ejemplo 1: Proporcionalidad directa**

**Cuatro chicos durante 10 días de campamento han gastado en comer 25.000 pesos. En las mismas condiciones ¿cuánto gastarán en comer 6 chicos durante 15 días de campamento?**

         Doble número de chicos acampados el **mismo número de días** gastarán el doble. Luego las magnitudes número de chicos y dinero gastado son **directamente proporcionales**.

         El **mismo número de chicos**, si acampan el doble número de días gastarán el doble. Luego las magnitudes número de días de acampada y dinero gastado son **directamente proporcionales**.

Hemos relacionado las dos magnitudes conocidas, nº de chicos y nº de días con la cantidad desconocida, gasto.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| SABEMOS QUE | http://www.profesorenlinea.cl/imagenmatematica/Proporciones/image031.gif | **pesos** |
| REDUCCIÓN A LA UNIDAD | http://www.profesorenlinea.cl/imagenmatematica/Proporciones/image033.gif | pesos |
| http://www.profesorenlinea.cl/imagenmatematica/Proporciones/image035.gif | pesos |
|   | http://www.profesorenlinea.cl/imagenmatematica/Proporciones/image037.gif | pesos |
| BÚSQUEDA DEL RESULTADO | http://www.profesorenlinea.cl/imagenmatematica/Proporciones/image039.gif | pesos |

**Ejemplo 2: Proporcionalidad inversa**

**15 obreros trabajando 6 horas diarias, tardan 30 días en realizar un trabajo. ¿Cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo 10 obreros, empleando 8 horas diarias?**

         Doble número de obreros trabajando el mismo número de días trabajarán la mitad de horas al día para realizar el trabajo. Por tanto el número de obreros y el número de días de trabajo son inversamente proporcionales.

         Doble número de horas diarias de trabajo el mismo número de obreros tardarán la mitad de días en realizar el trabajo. Luego el número de horas diarias de trabajo y el número de días de trabajo son inversamente proporcionales.

Hemos relacionado las dos magnitudes conocidas, nº de obreros y nº de horas diarias de trabajo, con la cantidad desconocida, nº de días de trabajo.

|  |  |
| --- | --- |
| SABEMOS QUE | http://www.profesorenlinea.cl/imagenmatematica/Proporciones/image041.gif |
| REDUCCIÓN A LA UNIDAD |  |
| http://www.profesorenlinea.cl/imagenmatematica/Proporciones/image043.gif |
| http://www.profesorenlinea.cl/imagenmatematica/Proporciones/image045.gif |
| BÚSQUEDA DEL RESULTADO | http://www.profesorenlinea.cl/imagenmatematica/Proporciones/image047.gif |
| http://www.profesorenlinea.cl/imagenmatematica/Proporciones/image049.gif |

Por tanto, 10 obreros empleando 8 horas diarias tardarán 33,75 días.

**Ver** [**Desarrollo de un ejercicio de proporcionalidad**](http://www.profesorenlinea.cl/matematica/ProporcionesEjerc.htm)

**Este texto está extraído de los libros de la Editorial SM de 1º y 2º de ESO**

**Ver PSU: Matemática.** [**Pregunta 03**](http://www.profesorenlinea.cl/PSU/Matematica/Preguntas/Pregunta%2003.html)

http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Proporcionalidad.htm